最大・最小

$\boxed{1}$ a を定数とし, $y=-x^2+2ax-2a+3$ について考える.

(1) y の最大値を $M(a)$ とするとき, $M(a)$ の最小値を求めよ.

(2) y の $0 \leqq x \leqq 1$ における最大値を $N(a)$ とするとき, $N(a)$ の最小値を求めよ.

$\boxed{2}$ a を定数とし, $y=ax^2+2x-5$ の $0 \leqq x \leqq 2$ における最大値を $M(a)$ とする. このとき, $y=M(a)$ のグラフを図示せよ.

$\boxed{\text{宿題}}$ a を定数とする．$y = |x^2 - 6x + 5|$ の $a \leqq x \leqq a + 1$ における最大値を求めよ．

解答.

$\boxed{1}$ (1) x について平方完成をすると,

$$y = -(x-a)^2 + a^2 - 2a + 3$$

となるので, $M(a) = a^2 - 2a + 3$ である. これを a について平方完成すると,

$$M(a) = (a-1)^2 + 2$$

となるので, $M(a)$ の最小値は 2 である.

(2) $f(x) = -x^2 + 2ax - 2a + 3$ とおく. 軸 $x = a$ と区間 $0 \leqq x \leqq 1$ の位置関係で場合分けする.

- $a < 0$ のとき　$x = 0$ で最大になるので, $N(a) = f(0) = -2a + 3$ である.
- $0 \leqq a \leqq 1$ のとき　$x = a$ で最大になるので, $N(a) = f(a) = a^2 - 2a + 3$ である.
- $a > 1$ のとき　$x = 1$ で最大になるので, $N(a) = f(1) = 2$ である.

よって, それぞれの場合について, $N(a)$ のとりうる範囲を調べてみると,

- $a < 0$ のとき　$N(a) = f(0) = -2a + 3 > 3$.
- $0 \leqq a \leqq 1$ のとき　$N(a) = f(a) = a^2 - 2a + 3 = (a-1)^2 + 2 \geqq 2$.
- $a > 1$ のとき　$N(a) = f(1) = 2$.

以上より, $N(a)$ の最小値は 2 である.