# 1　定数・未知数・変数

**例題 1.1.**

(1) 2 次関数 $y = x^2 - 6x + 8$ の最小値を求めよ.

(2) 2 次方程式 $x^2 - 6x + 8 = 0$ を解け.

**解答**.

(1) $y = x^2 - 6x + 8 = (x-3)^2 - 1 \geqq -1$ より, $x = 3$ のとき, 最小値 $-1$ をとる.

(2) $(x-2)(x-4) = 0$ より, $x = 2, 4$.

□

解説

この 2 問は非常に基礎的であるが, 重要な例題である. (1) では平方完成をして解き, (2) では因数分解をして解く. どちらも同じ $x^2 - 6x + 8$ に関する問題であるのに, なぜ解き方が異なるのだろうか. キーワードは**変数**と**未知数**である.

(1) では, 文字 $x$ が実数全体を動いている. この動く文字 $x$ が何回登場しているかに注目してみよう. まず, はじめの式

$$y = x^2 - 6x + 8$$

の段階では, $x$ の登場回数は 2 回である. 一方で, 平方完成したあとの式

$$y = (x-3)^2 - 1$$

の段階では, $x$ の登場回数は 1 回である. 平方完成したことにより, $x$ の登場回数が減ったことが分かる. このように, ある範囲を動く文字のことを**変数**という. ”二兎追うものは一兎をも得ず”というように, 動くものが複数回登場する状態を考えるのは簡単ではないので, 変数の**登場回数を減らす**ことが重要になる.

(2) では, 文字 $x$ は動いてはいない. 何らかの数ではあるが, まだ分からないだけである. このように, 方程式や不等式の中のまだ値が分かっていない文字のことを**未知数**という. 未知数を扱うときは, **積の形を作る**のが基本的な方針になる.

まとめ

- 変数 $\cdots$ 登場回数を減らす
- 未知数 $\cdots$ 積の形を作る

**例題 1.2.** $a, b$ を実数とする. 多項式 $a^2 - 6a - 4ab + 12b + 4b^2 + 8$ の最小値を求めよ. また, 最小値をとるときの $a, b$ の条件を記述せよ.

**解答**. $a$ に関して降べきの順に並べかえると,

$$\begin{aligned} a^2 - 6a - 4ab + 12b + 4b^2 + 8 &= a^2 - (4b+6)a + 4b^2 + 12b + 8 \\ &= \{a - (2b+3)\}^2 - (2b+3)^2 + 4b^2 + 12b + 8 \\ &= \{a - (2b+3)\}^2 - 1 \\ &\geqq -1. \end{aligned}$$

よって, $a = 2b + 3$ のときに, 最小値 $-1$ をとる. □

解説

この問題では, 2 つの文字 $a, b$ が実数全体を動いている. つまり, 変数が 2 つあるというわけである. 複数のものが同時に動くのを観察するのは簡単ではない. そこで, 片方の文字を固定（**定数**とみなす）して, 変数の数を 1 つにすることが重要になる. 上の解答では, $b$ を固定し, $a$ に関して降べきの順に並べかえたわけである.

$$a^2 - (4b+6)a + 4b^2 + 12b + 8$$

あとは変数 $a$ の登場回数を減らす, つまり平方完成をすればよい.

$\boxed{1}$ $a, b$ が実数全体を動くとき, $9a^2 + 5b^2 + 12ab - 6a - 10b + 15$ の最小値を求めよ.

$\boxed{2}$ 実数 $a, b$ が連立不等式

$$\begin{cases} a^2 + b^2 - 3 \leqq 0 \\ a^2b + ab^2 - 2a^2 + 2b^2 - 2ab - 8b + 8 \leqq 0 \end{cases}$$

をみたすとき, $b$ の最大値を求めよ.

$\boxed{3}$ $f(x) = x^3 - 3x^2 - 45x + 48$ とする.

(1) 3 次関数 $y = f(x)$ のグラフをかけ.（極値および変曲点もかくこと）

(2) 点 $P(0, 48)$ を通る傾き $k$ の直線を $l$ とするとき, $y = f(x)$ と $l$ が相異なる 3 点で交わる条件を求めよ.

(3) (2) の条件において, 点 P 以外の交点を $\mathrm{A}(\alpha, f(\alpha)), \mathrm{B}(\beta, f(\beta))$（$\alpha < \beta$）とおく. このとき, $\mathrm{AP} : \mathrm{BP} = 1 : 2$ となる $k$ の値を求めよ.