サンプル問題（HARD）

$\boxed{1}$ xy 平面上に線を引くゲームを考える。原点からスタートし、サイコロを振って出た目の数だけ右に線を引きながら移動する。もう一度サイコロを振り、今度はその点から上方向に線を引きながら移動する。以下同様に左方向、下方向、右方向…とサイコロを振って出た目の数だけ線を引いていく。そしてちょうど原点に戻ってきたとき、その閉曲線 C で囲まれた部分の面積 S を得点とし、この操作を終了する。ただし、C で囲まれた部分が重複していても面積は重複させないものとする。 サイコロを 10 回振って終了したとき、S の最大値を求めよ。

$\boxed{2}$ 次の条件を満たす n 次多項式 $f(x)$ の個数を求めよ.

- $f(x)$ の最高次の係数は 1 である.
- $f(x^2) = (-1)^n f(x+2)f(-x+2)$ が成り立っている.

解答.

$\boxed{1}$ まず、閉曲線 C が 2 つの 6×6 の正方形の和集合で覆えるということを示す。サイコロの出目を順に、$a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_5, b_5$ とおく。10 回目に原点に戻るという条件より、

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 = 0, \quad b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + b_5 = 0 \tag{1}$$

次が成り立つ。ここで、

$$\begin{aligned} &x_0 = 0, && x_1 = a_1, && x_2 = a_1 - a_2, && x_3 = a_1 - a_2 + a_3, && x_4 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \\ &y_0 = 0, && y_1 = b_1, && y_2 = b_1 - b_2, && y_3 = b_1 - b_2 + b_3, && y_4 = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 \end{aligned}$$

とおくと、C の 10 個の頂点の集合 V は

$$V = \{(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_i) \mid i = 0, 1, 2, 3, 4\}$$

と表される。ここで $x_5 = 0$ である。さて、ここで集合 $\{|x_j - x_i| \mid 0 \leq i < j \leq 4\}$ について考える。各要素を計算をしてみると、式 (1) より

- $(i, j) = (1, 4)$ のとき

$$|x_4 - x_1| = |-a_2 + a_3 - a_4| < 12$$

- $(i, j) \neq (1, 4)$ のとき

$$\begin{aligned} &|x_4 - x_0| = |-a_5| \leq 6, && |x_4 - x_2| = |a_3 - a_4| < 6, && |x_4 - x_3| = |-a_4| \leq 6 \\ &|x_3 - x_0| = |a_4 - a_5| < 6, && |x_3 - x_1| = |-a_2 + a_3| < 6, && |x_3 - x_2| = |a_3| \leq 6 \\ &|x_2 - x_0| = |-a_1 + a_2| < 6, && |x_2 - x_1| = |a_2| \leq 6, && |x_1 - x_0| = |a_1| \leq 6 \end{aligned}$$

となる。したがって、この集合の要素は最大でも 11 で、6 を超える可能性があるのは $|x_4 - x_1|$ しかないということが分かる。同様に、集合 $\{|y_j - y_i| \mid 0 \leq i < j \leq 4\}$ の要素は最大でも 11 で、6 を超える可能性があるのは $|y_4 - y_1|$ しかない。

さて、数列 $\{x_i\}_{i=0}^4$ および $\{y_j\}_{j=0}^4$ を小さい順に並び替えた数列をそれぞれ $\{s_i\}_{j=0}^4$ および $\{t_j\}_{j=0}^4$ とすると、C は $(s_4 - s_0) \times (t_4 - t_0)$ の長方形に含まれる。

- $s_4 - s_0 \leq 6$ のとき

$$t_4 - t_0 \leq \max\{|y_4 - y_1|, 6\} =< 12$$

  よって、C は 6×11 の長方形に含まれるので、2 つの 6×6 の正方形の和集合で覆える。

- $t_4 - t_0 \leq 6$ のとき

$$s_4 - s_0 \leq \max\{|x_4 - x_1|, 6\} < 12$$

  よって、C は 11×6 の長方形に含まれるので、2 つの 6×6 の正方形の和集合で覆える。

以下、$s_4 - s_0 > 6$ かつ $t_4 - t_0 > 6$ の場合について考える。このとき、6 を超える可能性があるのは $|x_4 - x_1|, |y_4 - y_1|$ しかないということから、

$$s_4 - s_1 \leq 6, \quad t_4 - t_1 \leq 6, \quad s_3 - s_0 \leq 6, \quad t_3 - t_0 \leq 6$$

となる。さて、ここで $P_{i,j} = (s_i, t_j)$ とおく。このとき、4 点 $P_{0,0}, P_{0,4}, P_{4,0}, P_{4,4}$ のうち、V に属するのは高々 2 つということを示す。まず、$P_{0,0} \in V$ ならば $P_{0,4} \notin V$ を示す。$P_{0,0} \in V$ かつ $P_{0,4} \in V$ と仮定する。このとき、線分 $P_{0,0}P_{0,4}$ の長さは

$$P_{0,0}P_{0,4} = t_4 - t_0 > 6$$

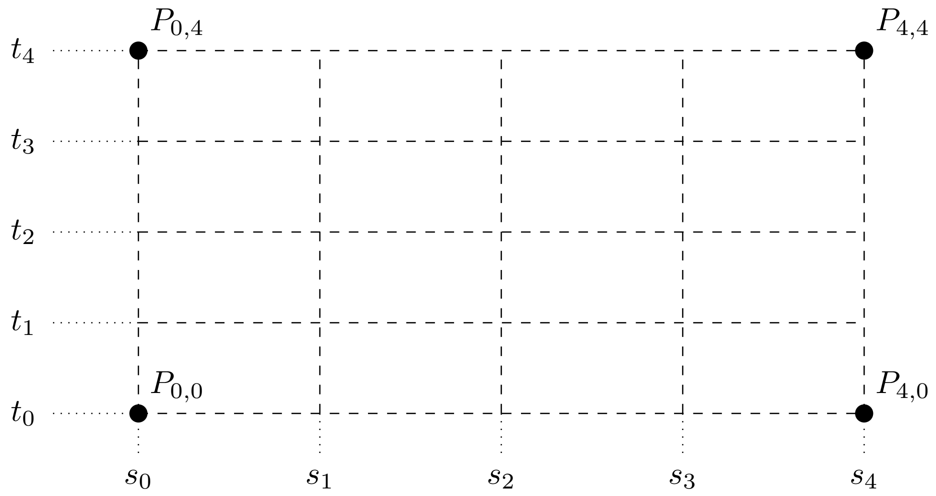
となっている。サイコロを 1 回振って進める距離は高々 6 なので、$P_{0,1}, P_{0,2}, P_{0,3}$ のいずれかは V に属している必要がある。つまり、直線 $x = s_0$ 上には V の要素が 3 つ以上存在している。閉曲線 C の構成より、各 $i = 0, 1, 2, 3, 4$ について直線 $x = s_i$ 上には少なくとも 2 つの V の要素が存在し、かつ V の要素の個数は 10 なので、$s_0 = s_1$ とならねばならない。このとき、

$$s_4 - s_0 = s_4 - s_1 \leq 6$$

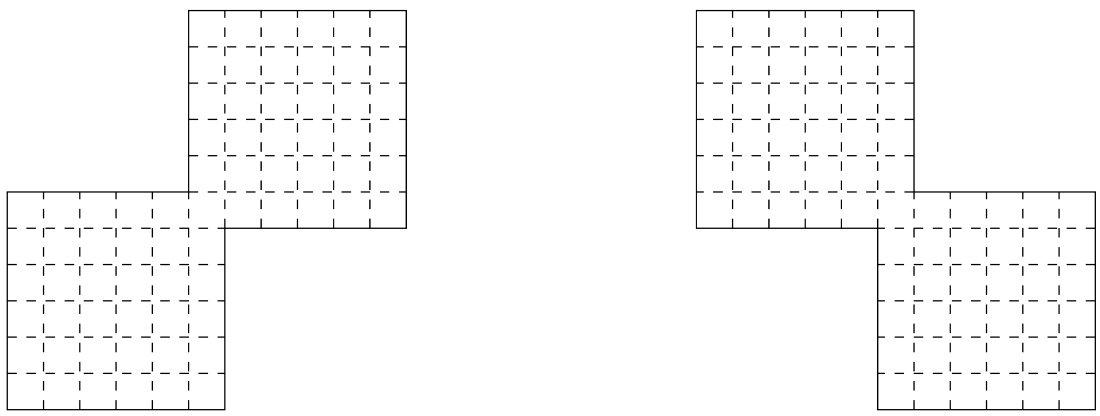
となり、これは $s_4 - s_0 > 6$ という仮定に矛盾する。よって、$P_{0,0} \in V$ ならば $P_{0,4} \notin V$ である。同様に考えると、隣り合っている 2 頂点（対角に位置していない 2 頂点）は同時に V に属さないということが分かる。したがって、4 点 $P_{0,0}, P_{0,4}, P_{4,0}, P_{4,4}$ のうち、V に属するのは高々 2 つである。したがって、C は 4 つの長方形

$$(s_3 - s_0) \times (t_3 - t_0),\ (s_4 - s_1) \times (t_4 - t_1),\ (s_3 - s_0) \times (t_4 - t_1),\ (s_3 - s_0) \times (t_4 - t_1)$$

のうちの 2 つの長方形の和集合に含まれる。いずれの長方形も辺の長さは 6 以下になっているので、閉曲線 C は 2 つの 6×6 の正方形の和集合で覆える。以上より、すべての場合について、C が 2 つの 6×6 の正方形の和集合で覆えることが示された。



次に C を覆う 2 つの 6×6 の正方形が共通部分を持つことを示す。もし共通部分を持たないとすると、$s_4 - s_0 = 12$ または $t_4 - t_0 = 12$ となるが、すでに見たように、$s_4 - s_0 < 12$ かつ $t_4 - t_0 < 12$ なので、これは矛盾である。C を覆う 2 つの 6×6 の正方形が共通部分を持つ。その共通部分の面積が 1 であるとき、それは次のいずれかの場合である。



つまり、$s_4 - s_0 = 11$ かつ $t_4 - t_0 = 11$ ということになる。したがって、式 (1) より

$$s_4 - s_0 = |x_4 - x_1| = |-a_2 + a_3 - a_4| = a_1 + a_5 = 11,$$
$$t_4 - t_0 = |y_4 - y_1| = |-b_2 + b_3 - b_4| = b_1 + b_5 = 11$$

となり、$1 \leq a_i \leq 6$ および $1 \leq b_j \leq 6$ という条件から、

$$a_2 = b_2 = 6,\ a_3 = b_3 = 1,\ a_4 = b_4 = 6$$

が確定する。よって、

- $(a_1, b_1) = (5, 5)$ のとき、$(x_3, y_3) = (5 - 6 + 1, 5 - 6 + 1) = (0, 0)$
- $(a_1, b_1) = (5, 6)$ のとき、$(x_3, y_2) = (5 - 6 + 1, 6 - 6) = (0, 0)$
- $(a_1, b_1) = (6, 6)$ のとき、$(x_2, y_2) = (6 - 6, 6 - 6) = (0, 0)$

となるので、この 3 パターンについてはゲームの途中で原点に返ってきてしまうため不適である。残りの $(a_1, b_1) = (6, 5)$ の場合については、実際に計算してみると $S = 61$ となることが分かる。以上より、$S < 6 \times 6 - 1 = 71$ であることが示された。次に

$$a_1 = 5, \quad a_2 = 6, \quad a_3 = 1, \quad a_4 = 6, \quad a_5 = 6$$
$$b_1 = 6, \quad b_2 = 5, \quad b_3 = 1, \quad b_4 = 6, \quad b_5 = 4$$

と定めて、実際に計算してみると $S = 70$ となることが分かる。以上より、S の最大値は 70 である。

$\boxed{2}$ 代数学の基本定理より, $f(x)$ は n 個の複素数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ を用いて,

$$f(x) = (x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n) = \prod_{i=1}^{n}(x-\alpha_i)$$

と表せる. 与えられた仮定より,

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n}(x^2-\alpha_i) = f(x^2) &= (-1)^n f(x+2)f(-x+2) \\ &= (-1)^n \prod_{i=1}^{n}\{x-(\alpha_i-2)\}\prod_{i=1}^{n}\{-x-(\alpha_i-2)\} \\ &= \prod_{i=1}^{n}\{x^2-(\alpha_i-2)^2\}\end{aligned}$$

となる. したがって, 各 $i \in \{1, \ldots, n\}$ に対して, $(\alpha_i - 2)^2 = \alpha_j$ となる $j \in \{1, \ldots, n\}$ が存在する. そこで 2^k 次多項式 $F_k(x)$ を漸化式

$$F_1(x) = (x-2)^2, \quad F_k(x) = F_1(F_{k-1}(x))$$

により定めておくと, 方程式 $f(x) = 0$ の各解 α_i に対して,

$$\alpha_{i_1} = (\alpha_i - 2)^2 = F_1(\alpha_i)$$

となる $i_1 \in \{1, \ldots, n\}$ が存在し, この i_1 に対して,

$$\alpha_{i_2} = (\alpha_{i_1} - 2)^2 = F_1(\alpha_{i_1}) = F_1(F_1(\alpha_i)) = F_2(\alpha_i)$$

となる $i_2 \in \{1, \ldots, n\}$ が存在する. 以下, 帰納的に

$$\alpha_{i_k} = (\alpha_{i_{k-1}} - 2)^2 = F_1(\alpha_{i_{k-1}}) = F_1(F_{k-1}(\alpha_i)) = F_k(\alpha_i)$$

という等式が得られる. つまり, $F_1(\alpha_i), F_2(\alpha_i), \ldots, F_k(\alpha_i)$ も方程式 $f(x) = 0$ の解である. 方程式 $f(x) = 0$ の解の個数は有限個なので, ある $k \in \{1, \ldots, n\}$ に対して,

$$\alpha_i = \alpha_{i_k} = F_k(\alpha_i)$$

となる. よって, α_i は方程式 $F_k(x) = x$ の解になっている. そこで, 各因数 α_i に対して, $F_k(\alpha_i) = \alpha_i$ が成り立つ最小の $k \in \{1, \ldots, n\}$ を考え, その値によって方程式 $f(x)$ の解を分類することを考える. そこで, 集合 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ を

$$A_k = \{\alpha_i \mid F_l(\alpha_i) \neq \alpha_i \ (1 \leq l < k), \quad F_k(\alpha_i) = \alpha_i\} \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

により分割する. 多項式 $F_k(x)$ の構成より, $\alpha_i \in A_k$ ならば, $F_1(\alpha_i), \ldots, F_{k-1}(\alpha_i) \in A_k$ となるので, A_k の要素の個数は k の倍数である. そこで, 各 k 個組 $\{\alpha_i, F_1(\alpha_i), \ldots, F_{k-1}(\alpha_i)\}$ から 1 つ要素を取り出して集めた集合を $\overline{A_k}$ とかくことにすると, 多項式 $f(x)$ は

$$f(x) = \prod_{k=1}^{n}\left(\prod_{\alpha_i \in \overline{A_k}}(x-\alpha_i)(x-F_1(\alpha_i))\cdots(x-F_{k-1}(\alpha_i))\right)$$

とかきなおせる. 集合 $\overline{A_k}$ の大きさを m_k とおけば, 両辺の次数を比較して,

$$n = m_1 + 2m_2 + \cdots + nm_n$$

という等式が得られる. さて, 次に $\alpha_i \in A_k$ としてあり得る値の候補を調べていく. A_k の定義より, $\alpha_i \in A_k$ の値としてあり得るのは, 条件

$$(C_k) : F_l(x) \neq x \ (1 \leq l < k), \quad F_k(x) = x$$

をみたす解 x である．多項式 $F_k(x)$ の構成より, x が条件 (C_k) をみたすならば, $F_1(x), \dots, F_{k-1}(x)$ もみたすので, この条件をみたす x の個数は kp_k（p_k は整数）とかける．このとき, 各 $k = 1, \dots, n$ に対して, p_k 個の候補の中から重複を許して m_k 個の k 個組を選ぶことになるので, 与えられた条件をみたす $f(x)$ の個数を a_n と置くと,

$$a_n = \sum_{n=m_1+2m_2+\cdots+nm_n} \left(\prod_{k=1}^{n} {}_{p_k+m_k-1}\mathrm{C}_{m_k} \right)$$

となる．ただし, $a_0 = 1$ とする．まず, 補題として, 次が成り立つことを示す．

補題. 自然数 $k = 1, 2, \dots$ に対して, 次の等式が成り立つ．

$$\sum_{l|k} lp_l = 2^k$$

ただし, $l|k$ は l が k を割り切るということを意味する．

まず, 左辺が方程式 $F_k(x) = x$ の解全体の個数に一致することを示す．条件（C_k）は互いに排反であるから, 次の同値を示せばよい．

$$F_k(x) = x \iff \text{ある } l|k \text{ に対して, } x \text{ が条件（}C_l\text{）をみたす}$$

（ $\Longleftarrow$ ）ある $l|k$ に対して, x が条件（C_l）をみたすと仮定する．このとき, $k = ql$（q は整数）とおける, $F_l(x) = x$ であるから, 次を得る．

$$F_k(x) = F_{ql}(x) = \underbrace{F_l \circ \cdots \circ F_l}_{q \text{ 個}}(x) = x$$

（ $\Longrightarrow$ ）逆に, $F_k(x) = x$ と仮定する．このとき, x が条件（C_k）をみたさないならば, ある l（$1 \leq l < k$）に対して, $F_l(x) = x$ となる．そのような l の中で最小のものをとることにすれば, x は条件（C_l）をみたすことになる．よって, あとはこの l が k を割り切ることを示せばよい．$k = ql + r$（q, r は整数で $0 \leq r < l$）とおく．もし $r > 0$ ならば,

$$x = F_k(x) = F_{ql+r}(x) = \underbrace{F_l \circ \cdots \circ F_l}_{q \text{ 個}}(F_r(x)) = F_r(x)$$

となり, これは条件（C_l）に矛盾する．よって, $r = 0$ であり, l が k を割り切ることが示された．よって, あとは方程式 $F_k(x) = x$ が 2^k 個の実数解を持つことを示せばよい．$x = 4\cos^2\theta$（$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$）とおくと,

$$F_1(4\cos^2\theta) = (4\cos^2\theta - 2)^2 = 4(2\cos^2\theta - 1)^2 = 4\cos^2(2\theta)$$

となるので, これを繰り返して,

$$F_k(4\cos^2\theta) = F_1(F_{k-1}(4\cos^2\theta)) = F_1(4\cos^2(2^{k-1}\theta)) = 4\cos^2(2^k\theta)$$

を得る．よって,

$$\begin{aligned}
F_k(4\cos^2\theta) = & 4\cos^2\theta \iff 4(\cos^2(2^k\theta) - \cos^2\theta) = 0 \\
& \iff 4(\cos(2^k\theta) + \cos\theta)(\cos(2^k\theta) - \cos\theta) = 0 \\
& \iff -16\cos\left(\frac{2^k+1}{2}\theta\right)\cos\left(\frac{2^k-1}{2}\theta\right)\sin\left(\frac{2^k+1}{2}\theta\right)\sin\left(\frac{2^k-1}{2}\theta\right) = 0 \\
& \iff \frac{2^k+1}{2}\theta = \frac{\pi}{2}N, \quad \frac{2^k-1}{2}\theta = \frac{\pi}{2}(N-1) \\
& \iff \theta = \frac{N}{2^k+1}\pi, \quad \theta = \frac{N-1}{2^k-1}\pi \qquad (N = 1, \dots, 2^{k-1})
\end{aligned}$$

となる．以上より, 方程式 $F_k(x) = x$ は

$$x = 4\cos^2\left(\frac{N}{2^k+1}\pi\right), 4\cos^2\left(\frac{N-1}{2^k-1}\pi\right) \qquad (N = 1, \dots, 2^{k-1})$$

という 2^k 個の実数を解に持つことが分かる．以上より, 補題が示された．

以下, a_n を計算するために, 数列 $\{a_n\}$ の母関数を考えてみよう.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{n=m_1+2m_2+\cdots+nm_n}\left(\prod_{k=1}^{n} {}_{p_k+m_k-1}\mathrm{C}_{m_k}\right)\right)T^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{n=m_1+2m_2+\cdots+nm_n}\left(\prod_{k=1}^{n} {}_{p_k+m_k-1}\mathrm{C}_{m_k}T^{km_k}\right)\right) \\ &= \prod_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{m_k=0}^{\infty} {}_{p_k+m_k-1}\mathrm{C}_{m_k}(T^k)^{m_k}\right) \\ &= \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-T^k\right)^{-p_k}\end{aligned}$$

となる. ただし, 最後の等号において, 重複組み合わせの母関数に関する公式

$$\sum_{m=0}^{\infty} {}_{p+m-1}\mathrm{C}_m T^m = (1+T+T^2+\cdots)^p = \left(\frac{1}{1-T}\right)^p = (1-T)^{-p}$$

を用いた. そこで, $G(T)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n$ とおいて, T に関して微分すると,

$$\begin{aligned}G^{(1)}(T) &= \sum_{l=1}^{\infty}\left((-p_l)\left(1-T^l\right)^{-p_l-1}\left(-lT^{l-1}\right)\prod_{k\neq l}\left(1-T^k\right)^{-p_k}\right) \\ &= \sum_{l=1}^{\infty}\left(lp_l\left(1-T^l\right)^{-1}T^{l-1}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-T^k\right)^{-p_k}\right) \\ &= \left(\sum_{l=1}^{\infty} lp_l\left(1+T^l+T^{2l}+\cdots\right)T^{l-1}\right)\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-T^k\right)^{-p_k} \\ &= \left(\sum_{l=1}^{\infty} lp_l\left(T^{l-1}+T^{2l-1}+\cdots\right)\right)G(T)\end{aligned}$$

となる. 各 $l=1,2,\ldots$ に対して, $H_l(T)=lp_l\sum_{d=1}^{\infty}T^{dl-1}$ とおき, $H(T)=\sum_{l=1}^{\infty}H_l(T)$ とおくと, $G^{(1)}(T)=H(T)G(T)$ となる. このとき, 積の微分の公式より,

$$G^{(n)}(T)=\sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1}\mathrm{C}_k H^{(k)}(T)G^{(n-k-1)}(T)$$

となる.

補題. $k=1,2,\ldots$ に対して, 次が成り立つ.

$$H^{(k)}(0)=2^{k+1}k!$$

$H_l(T)=lp_l\sum_{d=1}^{\infty}T^{dl-1}$ を T に関して k 回微分すると,

$$H_l^{(k)}(T)=lp_l\sum_{d=1}^{\infty}(dl-1)(dl-2)\cdots(dl-k)T^{dl-k-1}$$

となる. この級数はある d に対して $dl-k-1=0$ となるとき, つまり $l|k+1$ となるときに定数項 $k!$ が現れる. よって, 補題より,

$$H^{(k)}(0)=\sum_{l=1}^{\infty}H_l^{(k)}(0)=\sum_{l|k+1}(lp_lk!)=\left(\sum_{l|k+1}lp_l\right)k!=2^{k+1}k!$$

となる. よって, 示された.

最後に, $G^{(n)}(0)=2^n n!$ となることを n に関する帰納法で示す. もしこれが示されれば, $G^{(n)}(0)=a_n n!$ であるから, 求める n 次多項式 $f(x)$ の個数は $a_n=2^n$ 個ということになる. 補題より, $H(0)=p_1=2^1$ なので,

$$G^{(1)}(0)=H(0)G(0)=p_1a_0=2^1 1!$$

よって, $n=1$ のときが示された. n 未満の場合に成り立つと仮定すると, 補題より,

$$\begin{aligned}
G^{(n)}(0) &= \sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1}\mathrm{C}_k H^{(k)}(0) G^{(n-k-1)}(0) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}\, 2^{k+1}k!\, 2^{n-k-1}(n-k-1)! \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (n-1)! 2^n = 2^n n!
\end{aligned}$$

となる. したがって, $G^{(n)}(0)=2^n n!$ となることが示された. 以上より, 条件をみたす $f(x)$ の個数は 2^n 個である.